GHEORGHE CĂINICEANU
(coordonator)
EMILIA-ȘTEFANIA RĂDUCAN, CARMEN-VICTORIȚA CHIRFOT,
MARIANA DRAGA-TĂTUCU, ELENA RÎMNICEANU,
TOMIȚĂ-CONSTANTIN VASILE, LEONARD GIUGIUC,
DANIEL STRETCU, DENISA-NICOLETA NECIU, VLAD LUNGU

matematică

olimpiade și concursuri școlare

clasele IX-XII

2018-2019

Editura Paralela 45

CUPRINS

ENUNȚURI

clasa a IX-a

1. olimpiade

ETAPA LOCALĂ

Arad

9.O.1. Se dau punctele fixe A, B și punctul M exterior dreptei AB. Arătați că rezultanta vectorilor $2\overrightarrow{MA}$ și $5\overrightarrow{MB}$ trece printr-un punct fix.

9.O.2. Numerele reale strict pozitive verifică relațiile: $a = mx$, $b = ny$, $c = pz$. Arătați că, dacă tripletele a, b, c și x, y, z sunt progresii geometrice, iar tripletul m, n, p este progresie aritmetică, atunci $m = n = p$.

9.O.3. Arătați că, dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci:

$$\frac{3}{2} \le \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \le 2.$$

9.O.4. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Gazeta Matematică nr. 9/2018

Argeș

9.O.5. Arătați că numărul $A = 3\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ cifre}}76\underbrace{00\ldots0}_{2018\text{ cifre}}56$, $n \in \mathbb{N}$, se poate scrie ca suma pătratelor a patru numere naturale pare consecutive.

Adrian Gobej

9.O.6. Arătați că $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^4}\right) < \frac{9}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Silviu Graure

9.O.7. Fie x număr real și a, b, p numere naturale nenule, $(a, b) = 1$, astfel încât $1 + x + x^2 + \ldots + x^n \neq$ $\neq 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Arătați că, dacă $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^a \in \mathbb{Q}$ și $(1 + x + x^2 + \ldots + x^n)^b \in \mathbb{Q}$, oricare ar fi $n \in \{p, p + 1\}$, atunci $x \in \mathbb{Q}$.

Cosmin Manea și Dragoș Petrică

9.O.8. a) Demonstrați că două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate dacă și numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

b) În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN. Demonstrați că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate.

Bihor

9.O.9. Fie x, y, $z > 0$ numere reale cu proprietatea $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Demonstrați inegalitățile următoare:

a) $x + y + z \geq 3$;

b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 \geq 12$.

9.O.10. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația pozitivă r și primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinați partea întreagă a numărului

$$A = \sqrt{1 + \frac{r}{a_1a_2}} + \sqrt{1 + \frac{r}{a_2a_3}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n \geq 2.$$

9.O.11. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (CA)$ și $C_1 \in (AB)$, astfel încât AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente. Cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ intersectează (a doua oară) BC, CA și AB, respectiv, în punctele A_2, B_2 și C_2. Arătați că:

a) $AC_1 \cdot AC_2 = AB_1 \cdot AB_2$;

b) dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente.

9.O.12. În patrulaterul convex $ABCD$ se notează cu G centrul de greutate al triunghiului BCD și cu H ortocentrul triunghiului ACD. Demonstrați că punctele A, B, G, H reprezintă, în această ordine, vârfurile unui paralelogram, dacă și numai dacă G este centrul cercului circumscris triunghiului ACD.

Botoșani

9.O.13. Arătați că, dacă numărul real a satisface condiția $\{a\} = \frac{1}{a}$, atunci a este irațional.

9.O.14. Dacă x_1, x_2, ..., x_n sunt numere reale pozitive astfel încât $\frac{1}{x_1 + 2019} + \ldots + \frac{1}{x_n + 2019} = \frac{1}{2019}$, atunci $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq (n - 1)^n \cdot 2019^n$.

9.O.15. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M, N, P, Q, R, S astfel încât $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{BN} = p\overrightarrow{NR}$ şi $\overrightarrow{CP} = p\overrightarrow{PS}$, unde $k, p \in \mathbb{R}$. Arătaţi că triunghiurile ABC, MNP şi QRS au acelaşi centru de greutate.

9.O.16. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu unghiurile B şi D congruente şi M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD, respectiv AD, astfel ca $BM = DQ$, $BN = PD$. Dacă R, S, T sunt mijloacele segmentelor MQ, BD, respectiv NP, demonstraţi că:

a) bisectoarele unghiurilor A şi C sunt paralele;

b) R, S şi T sunt coliniare.

Braşov

9.O.17. Determinaţi numerele reale x pentru care $x \cdot [x] = \{x\}$, unde $[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x.

9.O.18. În planul patrulaterului convex $ABCD$ se consideră un punct O. Fie G punctul din plan astfel încât $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

a) Fie E şi F mijloacele laturilor $[AB]$ şi, respectiv, $[CD]$ ale patrulaterului. Arătaţi că $G \in EF$.

b) Arătaţi că orice dreaptă care trece prin G împarte patrulaterul $ABCD$ în două figuri geometrice cu arii egale dacă şi numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

Cătălin Ciupală

9.O.19. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $|x - a| + |x - b| \geq |a - b|$, pentru orice număr real x.

b) Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x) = |x - 1| + |x - 2| + \ldots + |x - n|$, când x parcurge mulţimea numerelor reale.

Aurel Bârsan

9.O.20. Fie $a, b, c \geq 0$.

a) Demonstraţi inegalitatea $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

b) Presupunem $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Arătaţi că:

i) $a + b + c \leq 3$;

ii) $ab + bc + ac \leq 3$.

Romeo Ilie

Brăila

9.O.21. Pentru orice numere reale pozitive a, b, c, arătaţi că:

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

9.O.22. Arătaţi că $16^n + 4^n - 2$ se divide cu 9, pentru orice număr natural n.

Florin Rotaru

9.O.23. Demonstraţi că $\left(\frac{1}{3} - x\right)(x - 1) \leq [x]^2 + \{x\}^2$, pentru orice număr natural n.

Valentin Florin Damian

9.O.24. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC şi punctele A', B', C' simetricele punctelor A, B, respectiv C faţă de punctul H. Demonstraţi că, dacă triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Valentin Florin Damian

Bucureşti

9.O.25. Determinaţi mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=a$ are soluţie.

Notaţia $\{t\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real t.

9.O.26. Se consideră un patrulater convex $ABCD$, O intersecţia diagonalelor sale, un număr real $a>0$ şi punctele $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$, $Q\in(DA)$, astfel încât

$$\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PD}=\frac{DQ}{QA}=a.$$

a) Arătaţi că, dacă $a=1$, atunci $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$.

b) Arătaţi că, dacă $a\neq 1$ şi $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

9.O.27. a) Determinaţi numărul tripletelor (a, b, c) de numere naturale, cu $0\le a<b<c\le 100$ şi a, b, c în progresie aritmetică.

b) Trei termeni, a, b, c (nu neapărat consecutivi), ai unei progresii geometrice sunt numere naturale şi au suma număr par. Demonstraţi că numerele a, b şi c sunt pare.

9.O.28. Pentru x număr real definim $a_1(x)=|x-1|$ şi $a_{n+1}(x)=|a_n(x)-1|$, oricare ar fi numărul natural nenul n.

a) Arătaţi că, pentru orice număr real x, mulţimea $\{a_n(x)\mid n\in\mathbb{N}^*\}$.

b) Determinaţi numărul soluţiilor ecuaţiei $a_{2019}(x)=1$.

Buzău

9.O.29. Folosind, eventual, identitatea $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, arătaţi că pentru orice $n\ge 3$ există numerele naturale nenule $a_1<a_2<\ldots<a_n$, astfel ca $1=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$.

9.O.30. Fie a un număr raţional. Arătaţi că ecuaţia $[x]\cdot\{x\}=a$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

9.O.31. Fie a, b şi c numere pozitive. Arătaţi că $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c$. Când are loc egalitatea?

9.O.32. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $M\in(AB)$ şi $N\in(AC)$. Segmentele MC şi NB se intersectează în punctul T, iar dreapta AT intersectează BC în D. Arătaţi că $\frac{AT}{TD}=\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}$.

Caraș-Severin

9.O.33. Pentru orice număr real x se consideră expresia $E(x) = x^2 - x + 2$ şi se notează
$$a_n = \frac{n-4+E(n)}{E(n)},\ n \in \mathbb{N}^*.$$
a) Arătaţi că există $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $E(a) \in \mathbb{Z}$.

b) Determinaţi câte elemente are mulţimea $A = \{a_n \mid n \in \{1, 2, 3, ..., 100\}\}$.

9.O.34. Determinaţi cel mai mare număr natural n pentru care $a_n \le 2019$, ştiind că şirul $\left(a_n\right)_{n\ge1}$ de numere naturale are proprietatea $a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{n(3n+1)}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

9.O.35. a) Calculaţi $[ab + bc + ac]$, dacă $a, b, c \in (0, \infty)$, $a \cdot b \cdot c = 4$ şi $a^2 + b^2 + c^2 < 8$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

b) Dacă n este număr natural, atunci $\left\{\sqrt{n}\right\} = 0$ sau $\left\{\sqrt{n}\right\} > \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{n}}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

9.O.36. Se consideră un triunghi ABC şi un punct D în planul acestuia. Determinaţi numărul natural k, ştiind că: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$ (1), $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$ (2), $k\cdot\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DN}$ (3).

Cluj

9.O.37. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $abc = 1$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei
$$S = \frac{a^3b}{ab^2+1} + \frac{b^3c}{bc^2+1} + \frac{ac^3}{a^2c+1}.$$
Pentru ce valori ale lui a, b şi, respectiv, c se obţine această valoare minimă?

Gheorghe Lobont

9.O.38. Arătaţi că numerele a şi b au aceeaşi parte întreagă, unde $a = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{3n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, iar $b = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$.

Eugen Jecan

9.O.39. Demonstraţi că, pentru orice $a, b, c \in (0, \infty)$, are loc inegalitatea:
$$\frac{ab}{a^2+bc} + \frac{bc}{b^2+ca} + \frac{ca}{c^2+ab} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right).$$

Flavia Zeriu

9.O.40. Se consideră triunghiul oarecare ABC şi H ortocentrul său. Dacă A_1, A_2, A_3 sunt simetricele ortocentrului H faţă de mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi, respectiv, $[AB]$, iar H_1, H_2, H_3 sunt ortocentrele triunghiurilor BCA_1, ACA_2 şi, respectiv, ABA_3, arătaţi că:

a) $HH_1 = HH_2 = HH_3$;

b) $\overrightarrow{HH_1} + \overrightarrow{HH_2} + \overrightarrow{HH_3} = 3\overrightarrow{HG}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

Camelia Maria Magdaș

Constanța

9.O.41. Vezi problema **9.O.4.**, Olimpiada locală Arad.

9.O.42. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $\left[\dfrac{[n \cdot a]}{a}\right] = n - 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 1$ și $\left[\dfrac{[n \cdot b]}{b}\right] = n$, pentru orice $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $b < -1$.

b) Determinați mulțimile:

$$A_n = \left\{\left[\frac{[n \cdot a]}{a}\right] - \left[\frac{[-n \cdot a]}{-a}\right] \mid a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ |a| > 1\right\} \text{ și } B_n = \left\{\left[\frac{[n \cdot a]}{a}\right] + \left[\frac{[-n \cdot a]}{a}\right] \mid a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ |a| > 1\right\}.$$

S-a notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.

Gheorghe Andrei

9.O.43. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. Arătați că $0 \le a + b + c \le 3$.

b) Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $\dfrac{a(a-b)}{b^2} + \dfrac{b(b-a)}{c^2} + \dfrac{c(c-a)}{a^2} = 0$. Arătați că $a = b = c$.

Nelu Chichirim

9.O.44. În planul triunghiului ABC se consideră punctul P astfel încât $a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + a \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde s-a notat $a = BC$, $b = AC$. Arătați că P este intersecția dintre mediana din B și bisectoarea interioară a unghiului C.

Cătălin Zîrnă

Dâmbovița

9.O.45. a) Arătați că:

i) dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] + [-x] = 0$;

ii) dacă $x \notin \mathbb{Z}$, atunci $[x] + [-x] = -1$.

b) Rezolvați ecuația $[-2x] + [-x] + [x] + [2x] + 1 = 0$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

9.O.46. Vezi problema **9.O.4.**, Olimpiada locală Arad.

9.O.47. Dacă numerele $a, b, c \ge 0$ satisfac relația $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, arătați că:

$$\frac{a^2}{1+nbc} + \frac{b^2}{1+nca} + \frac{c^2}{1+nab} \ge \frac{3}{n+3}, \text{ pentru orice număr natural } n.$$

9.O.48. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ înscrise într-un cerc de centru O. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 sunt ortocentrele triunghiurilor BAA', CAA', CBB', ABB', ACC și, respectiv, BCC', demonstrați că $\overrightarrow{H_1H_2} + \overrightarrow{H_3H_4} + \overrightarrow{H_5H_6} = \vec{0}$.

Dolj

9.O.49. a) Aflaţi triunghiurile dreptunghice care au lungimile laturilor numere întregi în progresie aritmetică.

b) Determinaţi tripletele de numere naturale în progresie aritmetică strict crescătoare, prime între ele două câte două, ştiind că produsul lor divide suma cuburilor lor.

9.O.50. Fie $x, y, z > 0$, astfel încât $x + y + z = 1$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2y+3z}}+\frac{1}{\sqrt{2x+3y+z}}+\frac{1}{\sqrt{3x+y+2z}}\in[2, 3).$$

9.O.51. Determinaţi $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ să fie raţional.

9.O.52. Se consideră triunghiul ABC, M este mijlocul lui (AC), $N \in (BM)$ astfel încât $\overrightarrow{BM} = 4\overrightarrow{BN}$ şi $P \in (BC)$ astfel încât $\overrightarrow{PC} = -6\overrightarrow{PB}$.

a) Demonstraţi că punctele A, N, P sunt coliniare.

b) Dacă $Q \in (AB)$, astfel încât $PQ \parallel AC$, demonstraţi că dreptele AP, BM şi CQ sunt concurente.

Galaţi

9.O.53. a) Câte soluţii numere naturale are ecuaţia $\left[\left[\sqrt{x}\right]+\sqrt{x}\right] = 10$? (Justificare.) (S-a notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.)

b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ ştiind că mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| + |x - 2019| + |x + 2019| = m + 8\}$ are un singur element.

9.O.54. În patrulaterul convex $ABCD$, fie punctele M, N mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[CD]$, punctul G mijlocul segmentului $[MN]$, iar G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ACD, ABD, ABC.

a) Dacă O este un punct din planul patrulaterului, demonstraţi că $4 \cdot \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

b) Demonstraţi că dreptele AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 sunt concurente.

9.O.55. Determinaţi tripletele (x, y, z) de numere întregi, diferite două câte două, care verifică egalitatea

$$\frac{x^2}{(x-y)\cdot(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)\cdot(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)\cdot(z-y)}=x^2+y^2+z^2-61.$$

9.O.56. a) Demonstraţi că $\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} \le \sqrt{2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Fie numerele reale strict pozitive x, y, z, t cu proprietatea $x \cdot y = z \cdot t = 1$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}+\frac{1}{\sqrt{1+t}}\le\sqrt{2\cdot(x+y+z+t)}.$$

Giurgiu

9.O.57. Arătați că ecuația $4x^3-(m+9)x^2-(5m+9)x+2m^2-6m=0$, $m\geq -\frac{9}{8}$ are rădăcinile reale, dar nu toate sunt întregi pentru orice $m\geq -\frac{9}{8}$.

Paul Băiatu

9.O.58. Demonstrați că oricare ar fi numerele reale pozitive și nenule a, b, c este adevărată inegalitatea $abc\geq(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c)$.

9.O.59. Fie patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul de centru O și H, K ortocentrele triunghiurilor ACD, respectiv BCD, iar L mijlocul laturii $[AB]$. Știind că triunghiul HKL este echilateral de centru O, arătați că $ABCD$ este trapez isoscel.

Petru Todor, *Gazeta Matematică* nr. 4/2018

9.O.60. În triunghiul ABC se consideră punctele $M\in(BC)$, $N\in(AC)$ și $P\in(AB)$, astfel încât:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\frac{MB}{MC}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{NC}{NA}=\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\frac{PA}{PB}=1,$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC.

a) Demonstrați că dreptele AM, BN și CP sunt concurente într-un punct K.

b) Notăm cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă punctele K și I coincid, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral.

Gheorghe Alexe și George-Florin Șerban, Concursul „Petru Moroșan-Trident", Brăila, 2017

Gorj

9.O.61. a) Calculați partea întreagă a numărului $A=\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-n+2}$, unde n este un număr natural.

b) Determinați valoarea minimă a expresiei $E=|2x+3|+|5x-1|+|3x+2|$, unde x este număr real.

9.O.62. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^3+b^3+c^3=8$. Demonstrați că:

$$\frac{1}{2014+ab}+\frac{1}{2014+bc}+\frac{1}{2014+ca}\geq\frac{3}{2018}.$$

9.O.63. Fie mulțimea $A=\{3x+5y$, unde $x,y\in\mathbb{Z}\}$. Aflați cardinalul mulțimii $\mathbb{Z}\setminus A$.

9.O.64. În triunghiul ABC, bisectoarele AA', BB', CC' se intersectează în punctul I. Știind că $\frac{IA}{IA'}+\frac{IB}{IB'}+\frac{IC}{IC'}=6$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Iași

9.O.65. Fie triunghiul ABC și punctele $M\in(AB)$, $N\in(AC)$ astfel încât $BM=CN=x$. Fie E și F mijloacele segmentelor $[MN]$ și $[BC]$, iar $[AD$ bisectoarea unghiului BAC.

a) Exprimați vectorul $\overrightarrow{AD}$ în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$.

b) Demonstrați că $EF\parallel AD$.

9.O.66. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2016 \cdot \{x\} + 2017 \cdot [x] - 2018 \cdot x + 2019 = 0$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $[x + |x|] = |x + [x]|$.

9.O.67. a) Arătați că $xy + yz + zx \le \frac{(x+y+z)^2}{3}$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Fie $a, b, c, d > 0$ numere reale. Demonstrați că:

$$\frac{a}{\sqrt{bc+cd+db}} + \frac{b}{\sqrt{ac+cd+da}} + \frac{c}{\sqrt{ab+bd+da}} + \frac{d}{\sqrt{ab+bc+ca}} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

9.O.68. Fie triunghiul ABC cu $AB \ne 3AC$, $D \in (BC)$ astfel încât $BD = 3DC$, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, $DI \cap AB = \{E\}$, $AD \cap EC = \{F\}$. Calculați raportul $\frac{FC}{FE}$ în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

Ilfov

9.O.69. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $25\{x\}^2 + 1 = 10x$.

9.O.70. Considerăm șirul $(a_n)_{n\ge1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, $n \ge 1$. Calculați $\sum_{k=1}^{n} \frac{3 - a_k}{a_k - 1}$.

9.O.71. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} + \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} + \ldots + \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} < \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$$

9.O.72. Fie ABC un triunghi, D mijlocul lui (AC) și M un punct în plan astfel încât $\overrightarrow{MA} + a \cdot \overrightarrow{MB} = b \cdot \overrightarrow{MD}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $a = b = 1$, arătați că $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$.

b) Dacă $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BC}$, arătați că $a = b = 1$.

Maramureș

9.O.73. a) Arătați că $\frac{2x}{x^2 - x + 1} \ge \frac{-2}{3}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{2x}{x^2 - x + 1}\right] = \frac{2x}{2 - x}$.

9.O.74. a) Arătați că $(a^2 + b^2 + 1)(c^2 + 2) \ge (a + b + c)^2$, $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$. Când se obține egalitatea?

b) Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \ge 1$. Arătați că $ab + bc + ca \le 3$.

9.O.75. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale nenule ecuația $2(x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y + z)^2$, știind că $x + y + z \le 17$.

9.O.76. Fie patrulaterul convex $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$ astfel încât dreptele MQ și NP sunt paralele cu BD. Arătați că, dacă $[AN] \equiv [AP]$ și $[CM] \equiv [CQ]$, atunci patrulaterul $ABCD$ este ortodiagonal.

Mehedinți

9.O.77. Se consideră numerele reale x și y care îndeplinesc simultan condițiile $\{x\} + [y] = 11 - 4\sqrt{3}$ și $[x] + \{y\} = 7 - 2\sqrt{3}$. Arătați că $\{x\}^2 - 28\{y\}$ este număr întreg și calculați $x - y$.

9.O.78. Fie $ABCD$ un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, $2\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{PD} = -\overrightarrow{PC}$ și $2\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QA} = \vec{0}$. Arătați că $MP + QN \le \frac{1}{3}(AB + BC + 2CD + 2DA)$.

9.O.79. Determinați $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\max\left\{x^2 + y + \frac{1}{4},\ y^2 + x + \frac{1}{4}\right\} + |x - y| = 0$.

9.O.80. Fie $x, y \in (0, \infty)$ astfel încât $xy = 1$. Demonstrați că:

a) $\dfrac{x^{2018} + x^{2019}}{1 + y} + \dfrac{y^{2018} + y^{2019}}{1 + x} \ge 2$;

b) $x^{2019} + y^{2019} \ge x^{2018} + y^{2019}$.

Olt

9.O.81. Se consideră numerele reale distincte a, b, c. Arătați că:

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

9.O.82. Fie numerele naturale nenule m și n, cu $(m, n) = 1$. Arătați că:

$$\left\{\frac{m}{n}\right\} + \left\{\frac{2m}{n}\right\} + \left\{\frac{3m}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{(n-1)m}{n}\right\} = \frac{n-1}{2}.$$

9.O.83. În triunghiul ABC se notează cu M, N, P punctele de tangență a cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Se notează cu a, b, c lungimile laturilor și cu p semiperimetrul triunghiului. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{p-c}{a} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{p-b}{a} \cdot \overrightarrow{AC}$;

b) $a\overrightarrow{AM} + b\overrightarrow{BN} + c\overrightarrow{CP} = \vec{0}$;

c) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral;

d) punctul T verifică egalitatea $a\overrightarrow{TM} + b\overrightarrow{TN} + c\overrightarrow{TP} = \vec{0}$ dacă și numai dacă T este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

9.O.84. Fie numerele reale $x, y, z > 0$ astfel încât $x + y + z = 27xyz$. Arătați că:

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + 2yz}} + \frac{y}{\sqrt{1 + y^2 + 2zx}} + \frac{z}{\sqrt{1 + z^2 + 2xy}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}.$$